§18. Gorenstein 環

☆ local algebra

スキームの局所的な性質は、局所環の環論的な性質で調べる。

Q. どの程度悪い特異点か？

Q. どの程度"重複"しているか？

Q. どの程度一般的な超平面の交叉で書かれるか？

Theorem 3.15 (M. Artin). *Let X be a (nonsingular, projective) surface and let $E \subset X$ be a connected curve with integral components $E_1, \ldots, E_n$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *There exists a morphism $f : X \to Y$ with the following properties: Y is a normal projective surface, $f(E) = y$ is a Gorenstein point on Y, f is an isomorphism between $X \setminus E$ and $Y \setminus \{y\}$, and $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$.*

(2) *The intersection matrix $\|(E_i \cdot E_j)\|$ is negative definite, the E_i are nonsingular rational curves, and $(E_i^2) = -2$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

[Bădescu, Algebraic Surfaces]

← 正規Gorenstein特異点の解消に現れる例外因子の特徴づけ

体上有限生成は仮定。常に左を仮定したうえでの性質。☆は特徴付け

(general case)

この列全体的に怪しい

	Noeth. local $\supseteq$	Cohen-Macaulay $\supseteq$	Gorenstein $\supseteq$	Complete Intersection $\supseteq$	Regular
def ($n := \dim$)		$\dim = \mathrm{depth}$	$\mathrm{inj.dim} < \infty$	$\varepsilon_1 = \mathrm{emdim.} - \dim.$	$\dim = \mathrm{emdim.}$
Algebra (生成)	∃巴系	巴系 ⇔ ∃n元正則列. ⇕ 準正則列.		☆完備化は 完備reg.local/その正則列	∃☆正則巴系
(独立性)	解析的独立		☆巴系イデアルは既約		構造定理
(素因子)	高度定理	☆純性定理			
(重複)	$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{m}^N$	☆$l(A/\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q})$			
Geometry				(locally C.I.)	
(交叉 独立)	n元の零点	n元正則列の零点	?	aff.内の"独立"な曲面の交叉	ほぼ平面
(重複)	fatness有限	"純"、埋入なし	ある意味で極小の重複		重複度1
(dualizing)	$\exists \omega_X^\bullet$ dualizing complex	☆$\omega_X^\bullet = \omega_X^\circ[-n]$ ∃dualizing sheaf	☆ω_X° : 可逆	$\omega_X^\circ = \omega_{\mathbb{P}} \otimes \bigwedge^{\mathrm{codim}} (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$ ($X \xrightarrow{cl.} \mathbb{P}_k^N$)	$\omega_X^\circ = \omega_X$ canonical sheaf

☆導来圏での解釈　$X \xrightarrow[\text{proper}]{f} k$, n 次元

(参考：Hartshorne, AG
Stacks Project)

Grothendieck–Verdier duality：$Lf^* \dashv Rf_* = Rf_! \dashv {}^{\exists} f^!$：upper shriek

$$\underset{R\Gamma(\mathcal{F}^\bullet)}{\underset{\|}{\mathrm{RHom}(Rf_*\mathcal{F}^\bullet},\ \underset{k[0]}{\underset{\|}{\mathcal{O}_k^\bullet}}) \cong \mathrm{RHom}(\mathcal{F}^\bullet, \underset{\omega_X^\bullet}{\underset{\|}{f^!\mathcal{O}_k^\bullet}})$$

$\omega_X^\bullet$：dualizing complex.

$\xrightarrow{h^i}$ $H^{-i}(X, \mathcal{F}^\bullet)^\vee \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}^\bullet, \omega_X^\bullet)$：層の導来圏での Serre duality

($\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}[0]$ (つまり層 $\mathcal{F}$ を 0 次に配置した導来圏の対象) とすれば Abel 圏 $\mathrm{Coh}(X)$ での Serre duality を回復しそうに見えるが、$\omega_X^\bullet$ が一点に集中しない限り同型は層レベルに落ちない.)

複体 $\omega_X^\bullet$ が一点に集中すれば

$H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ)$：層の Abel 圏での Serre duality

$\Updownarrow$

$H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee \cong H^i(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X^\circ)$：見慣れた形

以下が成立.

- X：eq-dim. かつ CM $\iff$ $\omega_X^\bullet = \omega_X^\circ[-n]$
  $\Updownarrow$ def　　：dualizing complex は ある層 (dualizing sheaf) の シフトであり, 一点に集中する
  $\forall x \in X$, $\mathcal{O}_{x,X}$ が CM
  $\iff$ 層の Serre duality が成立する.

さらに, local に (CM 点, Gor 点, Reg 点 はそれぞれ X 内の開集合をなすことに注意)

- $\mathcal{O}_{x,X}$ が Gor. $\iff$ ω_X° は x のある近傍で可逆層.
- $\mathcal{O}_{x,X}$ が Reg. $\implies$ ω_X° は x のある近傍で ω_X：標準層に一致

余談

- X が Calabi–Yau $\overset{\text{def}}{\iff}$ Reg で $\omega_X^\circ = \omega_X = \mathcal{O}_X$.　self-dual.
  $\iff$ $\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)^\vee$

☆ local cohomology での解釈

$(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local.
M : f.g. A-Mod.

- $H^i_{\mathfrak{m}}(M) := H^i_{\{\mathfrak{m}\}}(\operatorname{Spec} A, \widetilde{M})$: local cohomology (cf. Ha Ex. III. 3.3.)

<u>Fact.</u> $\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = \min\{ i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0 \}$: depthのコホモロジー論的解釈 (cf. Ha Ex. III. 3.4.)

- A : CM のとき $n := \dim(A) = \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}(A)$

<u>Fact</u> ① $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ は $i \neq n$ で 0 i.e. 一点に集中する.

② $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \underbrace{\operatorname{Ext}^{n-i}_A(M, \omega_A)^\vee}$: local duality

$\vee$ は $\operatorname{Hom}_A(-, E(k))$ の意 : Matlis duality

≀‖ よい条件 (長さ有限 等)

$\operatorname{Hom}_k(-, k)$: Serre duality の類似

- A : Gorenstein のとき

<u>Fact.</u> ① $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ は $i \neq n$ で 0

しかも $i = n$ で $E(k)$

global な Gor. の特徴として ω_X : inv. があった.

② $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \underbrace{\operatorname{Ext}^{n-i}_A(M, A)^\vee}_{\text{self-dual.}}$ i.e. $\omega_A = A$ となる.

Q. Koszul complex との関係は?
homology

A. コホモロジー版 Koszul に入れる元を冪乗した colim が局所コホモロジーらしい?

〈Overview〉 Gorenstein 早見表

大変パート①
(Extの補題4つ)

Thm. 18.1. Gorenstein 性の同値な特徴づけ

i) inj.dim $< \infty$ ii)' inj.dim $=$ dim

iii) CM かつ $\mathrm{Ext}_A^{\dim}(k, A) = k$

iv) $\forall$巴系イデアル：既約 v) $\exists$巴系イデアル：既約

Thm. 18.2. Gorenstein 性は local property.

大変パート②
(inj.hull の理論)

Thm. 18.3. A : Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $\hat{A}$: Gorenstein

Thm. 18.8. A : Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $A \hookrightarrow I^\bullet$: min. inj. resol. は

$$I^i = \bigoplus_{\mathrm{ht}P = i} E_A(A/P)$$

Ex. 18.1. $(\underline{a})$: A列

A : Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $A/(\underline{a})$: Gorenstein

Ex. 18.3. A : Gorenstein $\Rightarrow$ $A[x]$: Gorenstein

Rmk.

- Noether, local $\Leftarrow$ CM $\Leftarrow$ Gorenstein $\Leftarrow$ Regular.
- CMと同様，Gor. は準同型像 (i.e. 剰余) で安定ではない.
- CMと同様，Gorenstein 非局所環 の概念もある.
- CMと違い，Gorenstein "加群" の概念は無い.

Lem.1 A：環, M：A-Mod, $n \geq 0$ に対し

$$\operatorname{inj.dim} M \leq n \iff \forall I,\ \operatorname{Ext}_A^{n+1}(A/I, M) = 0$$

さらに A：Noether なら $\forall I$ は $\forall \mathfrak{p}$ でよい.

〈気持ち〉Ext は $\operatorname{Hom}(N, (M \text{の inj.resol.}))$ で計算するので…

「inj.resol. が消える ⇒ Ext が消える」は明らか.

逆のことを, $N = A/I$ という形の加群だけで判定できるという Lemma.

$A/\mathfrak{p}$ if Noether

prf. (⇒) は明らか.

(⇐) $n=0$

$$\forall I,\quad A \leftarrow I \leftarrow 0 \quad :\text{ex.}$$

$$\operatorname{Hom}(A,M) \to \operatorname{Hom}(I,M) \to \underset{\substack{\| \text{仮定} \\ \operatorname{Ext}^1(A/I,M)}}{0} \quad :\text{ex.} \quad \overset{\text{Thm.B.3}}{\rightsquigarrow} \quad M : \text{inj.} \ (\operatorname{inj.dim} = 0)$$

$n>0$

$$0 \to M \to Q^0 \to \cdots \to Q^{n-1} \to Q^n \to Q^{n+1} \to \cdots \quad :\text{inj.resol} \ \cdots ㋐$$

を打ち切って

$$\begin{cases} 0 \to M \to Q^0 \to \cdots \to Q^{n-1} \to C \to 0 & :\text{ex.} \cdots ㋑ \\ \qquad\qquad 0 \to C \to Q^n \to Q^{n+1} \to \cdots & :\text{inj.resol.} \cdots ㋒ \end{cases}$$

に分ける.

M / C の inj.resol. ㋐ / ㋒ を見比べると

$$\operatorname{Ext}_A^{n+1}(A/I, M) \overset{\text{仮定}}{=} 0$$
$$\cong \operatorname{Ext}_A^1(A/I, C) \overset{\Downarrow}{=} 0$$

$\Downarrow$ $n=0$ のときの考察

C : inj. $\xrightarrow{㋑}$ $\operatorname{inj.dim} M \leq n$.

… A：Noether のときは

(Thm.6.4) $\forall N$: A-Mod, $\exists N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_{r+1} = 0$, $N_i/N_{i+1} \cong A/\mathfrak{p}_i$

より「$\forall \mathfrak{p}$, $\operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M) = 0$」が

「$\forall N$, $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$」を意味する. $i = n+1$, $N = A/I$ とすれば OK.

Lem.1 □

Lem. 2 A: 環, M, N: A-Mod.

$x \in A$ が A 正則かつ M 正則で、$xN = 0$ だとする.

$\Updownarrow$ (N はある $\bar{A}$-Mod のスカラー制限)

$\bar{A} = A/xA$, $\bar{M} = M/xM$ とおくと

- $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$
- $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, M) \cong \mathrm{Ext}_{\bar{A}}^{n}(N, \bar{M})$ $(n \geq 0)$ 正則元で割ると Ext が 1 ズレる.

〈観察〉 $A \twoheadrightarrow A/xA = \bar{A}$ に関する随伴ぽいものとして解釈できる.

$$\begin{cases} \bar{M} = M^{\bar{A}} = M \otimes_A \bar{A} & : \text{スカラー拡大} \\ N = N_A & : \text{スカラー制限} \end{cases}$$

なので

$$\mathrm{Ext}_A(N_A, M)[1] \cong \mathrm{Ext}_{\bar{A}}(N, M^{\bar{A}})$$ (x が M-正則なら)

cf. $\mathrm{Hom}_A(M, N_A) \cong \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(M^{\bar{A}}, N)$: 通常の拡大⊣制限 随伴

さらに観察… 導来圏に持ち上げる.

☆ $\mathrm{RHom}_A(N_A, M)[1] \cong \mathrm{RHom}_{\bar{A}}(N, M \otimes^L_A \bar{A})$: M について仮定なく成立.

$\downarrow h^n$ もし $M \otimes^L_A \bar{A}$ が一点に集中すれば

$\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N_A, M) \cong \mathrm{Ext}_{\bar{A}}^{n}(N, M^{\bar{A}})$: 元の Lem. 1 を回復する.

$\rightsquigarrow$ $M \otimes^L_A \bar{A}$ が一点に集中するのはいつか?

$\downarrow h^i$

$\mathrm{Tor}_i^A(M, \bar{A})$ Koszul ホモロジーの消滅による M列の特徴づけの類似 ?

$\downarrow$

<u>Claim.</u> x が A-正則かつ M-正則なら $\mathrm{Tor}_i^A(M, \bar{A}) = 0$ $(\forall i \neq 0)$

ここで使う

☺ $0 \to A \xrightarrow{x} A \to \bar{A} \to 0$ (∵ x は A-正則) 長完全列

ゼロ ($\mathrm{Tor}_i^A(-, A)$ は $i \neq 0$ で常に 0)

$\to \mathrm{Tor}_i^A(M, \bar{A}) \to$

$\to \mathrm{Tor}_1^A(M, \bar{A}) \to$

$\to M \xrightarrow{x} M \to M^{\bar{A}} \to 0$ (∵ x は M-正則)

☆の計算 $\quad \mathrm{RHom}_A(N_A, \quad M \quad)[1] \overset{?}{\simeq} \mathrm{RHom}_{\bar{A}}(N, M \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} \bar{A})$

$\qquad \wr\|$ 通常の制限 ⊣ 余スカラー拡大随伴

$\mathrm{RHom}_{\bar{A}}(N, \mathrm{RHom}_A(\bar{A}, M))[1]$

$\qquad \wr\|$

$\mathrm{RHom}_{\bar{A}}(N, \mathrm{RHom}_A(\bar{A}, M)[1])$

くらべる.

① 構成からの計算 (Abel圏的計算)

$$[A \xrightarrow{x} A] \; : \text{proj. resol. なので} \; \xmapsto{M \otimes_A -} \; [\underset{-1}{M} \xrightarrow{x} \underset{0}{M}] = M \overset{L}{\otimes} \bar{A}$$

$$\downarrow \; : \text{qis.} \qquad\qquad\qquad\qquad \wr\| \text{シフト}$$

$$[\underset{-1}{} \; \underset{0}{\bar{A}}] \qquad \xmapsto{\mathrm{Hom}(-,M)} \; [\underset{1}{M} \xleftarrow{x} \underset{0}{M}] = \mathrm{RHom}(\bar{A}, M)$$

② 完全三角での計算 (三角圏的計算)

(仮定) $\quad A \xrightarrow{x} A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow A[1] \; : \text{d.t.}$

$$M \xrightarrow{x} M \to M \overset{L}{\otimes} \bar{A} \to M[1] \; : \text{d.t.} \quad \leftarrow M \overset{L}{\otimes} -$$

$$\| \qquad \| \;\Rightarrow\; \wr\| \; \because \text{cone の一意性}$$

$$\mathrm{RHom}(\bar{A}, M) \to M \xrightarrow{x} M \to \mathrm{RHom}(\bar{A}, M)[1] \; : \text{d.t.}$$

ひっくり返す

$$M \xleftarrow{x} M \leftarrow \mathrm{RHom}(\bar{A}, M) \leftarrow \mathrm{RHom}(A[1], M) \; : \text{d.t.} \quad \leftarrow \mathrm{RHom}(-,M)$$

(Lem.2)
prf. $\quad \text{proj.dim}_A \bar{A} = 1$ に注意してホモロジー代数をする. □

Lem. 3 $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local M: f.g. A-Mod
$\mathfrak{p}$: Aの素イデアル $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = 1$ ならば

$$\mathrm{Ext}_A^{i+1}(k, M) = 0 \implies \mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{p}, M) = 0$$

〈気持ち〉 $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{m} \to 0$: ex. により

$$0 \overset{\text{if}}{=} \mathrm{Ext}^{i+1}(A/\mathfrak{m}) \leftarrow \mathrm{Ext}^i(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) \leftarrow \mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{p}) \underset{\text{then}}{=} 0$$

これを言う命題. 謎. 証明も謎.
$\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$は単純A-Modだが、そこから従うわけでもなく…

prf.
$x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ をひとつ取る.

- $\mathfrak{p} + xA$ は $\mathfrak{m}$-準素 なので、$N = A/(\mathfrak{p}+xA)$ とおくと
  $N = N_0 \supseteq \cdots \supseteq N_r = 0$, $N_i/N_{i+1} \cong k$ という filtration ができる.

  各N_iは$A/\mathrm{Ann}(N) = A/(\mathfrak{p}+xA)$-Mod より $A/\mathfrak{p}_i$に現れる$\mathfrak{p}_i$は $A/(\mathfrak{p}+xA)$の素イデアル i.e. $\mathfrak{m}$.

- 仮定($\mathrm{Ext}^{i+1}(k, M)$が消える) より $\mathrm{Ext}^{i+1}(N, M)$も消える.

- $0 \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{x} A/\mathfrak{p} \to N \to 0$: ex. より

$$0 = \mathrm{Ext}^{i+1}(N, M) \leftarrow \mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M) \xleftarrow{x} \mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M) \quad : \text{ex.}$$

- $\mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{p}, M)$ は f.g. A-Mod なので… NAK より これ $= 0$.

(inj. resol. だと怪しく見えるが proj. resol. でも計算でき、その場合 各々 f.g. に取れるのは明らか.)

Lem. 3 □

Lem. 4 $(A, \mathfrak{m}, k)$: Noether, local M: f.g. A-Mod
$\mathfrak{p}$: Aの素イデアル $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = d$ ならば

$$\mathrm{Ext}_A^i(k, M) = 0 \implies \mathrm{Ext}_{A_\mathfrak{p}}^{i-d}(\kappa(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) = 0$$

$\mathrm{Ext}_A^{i-0}(\kappa(\mathfrak{m}), M_\mathfrak{m})$

prf. $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ として. Extと局所化は交換するので Lem. 3と局所化を交互にくり返せばよい.

Thm. 18.1 $(A, \mathfrak{m}, k)$: n次元 Noether, local. TFAE $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Gorenstein

(1) $\mathrm{inj.dim}\, A < \infty$

(1') $\mathrm{inj.dim}\, A = n$

(2) $\mathrm{Ext}_A^i(k, A) = 0 \quad (i \neq n), \quad = k \quad (i = n)$ … $0 \overset{n}{\boxed{k}} 0$

(3) $\mathrm{Ext}_A^N(k, A) = 0$ なる $N > n$ が存在する … $n \overset{\exists}{<} 0$

(4) $\mathrm{Ext}_A^i(k, A) = 0 \quad (i < n), \quad = k \quad (i = n)$ … $0 \overset{n}{\boxed{k}}$

(4') $\mathrm{Ext}_A^n(k, A) = k$ かつ A : CM … CM & $\overset{n}{\boxed{k}}$

(5) A : CM かつ $^\forall A$の巴系イデアル : 既約

(5') A : CM かつ $^\exists A$の巴系イデアル : 既約

Rmk.

- Iが既約 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $I = J \cap J'$ なら $I = J$ or J'

  e.g. 素イデアルは既約 $\because$ prime avoidance

  既約イデアルは準素 (Noether環なら) (cf. Lasker-Noether's thm. の prf)

  $\rightsquigarrow$ 素と準素の間くらいの概念

  幾何的には、「既約であり、ダブり方にも制限がかかっている」くらい？

- Ext による特徴づけについて.

	i	… $n-1$	n	$n+1$ …
$\mathrm{Ext}_A^i(k, A)$	CM	ゼロ	非ゼロ	↗ 不明 (非Gor. なら全て非ゼロ)
	Gor.	ゼロ	k	ゼロ

- 順序

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathrm{inj.dim}<\infty}{(1)} \arrow[r, Rightarrow, "大変"] & \underset{\mathrm{inj.dim}=n}{(1')} \arrow[d, Rightarrow, "やる"'] & & \underset{\mathrm{CM}\&\exists 巴:\mathrm{irr}}{(5')} \arrow[dl, Rightarrow, "大変"] & \underset{\mathrm{CM}\&\forall 巴:\mathrm{irr.}}{(5)} \arrow[l, Rightarrow, "\mathrm{OK}"'] \\
\underset{n<どこか}{\underset{\exists 0}{(3)}} \arrow[u, Rightarrow, "大変"] & \underset{n次}{\underset{0\boxed{k}0}{(2)}} \arrow[l, Rightarrow, "\mathrm{OK}"] \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{OK}"'] & \underset{n次}{\underset{0\boxed{k}}{(4)}} \arrow[rr, Leftrightarrow, "\mathrm{OK}"'] & & \underset{n次}{\underset{\mathrm{CM}\&\boxed{k}}{(4')}} \arrow[u, Rightarrow, "やる"']
\end{tikzcd}$$

巴系イデアル自体は Noether local なら必ず1つ以上存在するので

((1) : inj.dim < ∞ ⇒ (1') : inj.dim = n)

○ $r :=$ inj.dim A とおく.

○ $n \le r$ (つまり dim ≤ inj.dim) を示す.

- ○ $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) = \dim A = n$ なる $\mathfrak{p}$ (よって特に極小) を取ると.

  $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A_\mathfrak{p})$ なので $A_\mathfrak{p}$ は $\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ と同型な部分加群を含み

  $\mathrm{Hom}(\kappa(\mathfrak{p}), A_\mathfrak{p}) \neq 0$. $\xrightarrow[\text{対偶}]{\text{Lem.4}}$ $\mathrm{Ext}^n_A(k, A) \neq 0$. $\xrightarrow[\text{Hom(Aのinj.resol)}]{\text{Extは}}$ $n \le r$.

○ $n \ge r$ (つまり dim ≥ inj.dim) を示す.

- ○ $r = 0$ なら上の $n \le r$ より OK. rについての帰納法.
- ○ $r > 0$ (帰納法)
  - ○ $\mathrm{Ext}^r_A(-, A) =: T$ は左完全反変. (ここで $r<\infty$ を使う)

    $0 \to \mathrm{Ext}^0 \to \mathrm{Ext}^0 \to \mathrm{Ext}^0 \to \cdots \cdots \to \mathrm{Ext}^r \to \mathrm{Ext}^r \to \mathrm{Ext}^r \to$ 必ず0 ($r =$ inj.dim より) } ココを見る
  - ○ Lem. 1 より $\exists \mathfrak{p}$, $T(A/\mathfrak{p}) \neq 0$.
  - ○ 実は $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ であり. $T(k) \neq 0$.

    ∵ $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ なら $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ を取れば

    $$0 \longrightarrow A/\mathfrak{p} \xrightarrow{x} A/\mathfrak{p} \quad : \text{ex.}$$
    $$0 \longleftarrow T(A/\mathfrak{p}) \xleftarrow{x} T(A/\mathfrak{p}) \quad : \text{ex.} \quad \xrightarrow{\text{NAK}} T(A/\mathfrak{p}) = 0. \text{ 矛盾.}$$
  - ○ $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(A)$ である.

    ∵ $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(A)$ なら

    $$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\exists} A \quad : \text{ex.}$$
    $$0 \longleftarrow T(k) \longleftarrow T(A) = \mathrm{Ext}^r_A(A, A) \overset{r>0}{=} 0 \rightsquigarrow T(k) = 0. \text{ 矛盾.}$$
  - ○ よって $\mathfrak{m} \ni \exists x$: A-正則元 が取れて. Lem.2 より

    $$\forall N : \bar{A}\text{-Mod},\ \mathrm{Ext}^i_{\bar{A}}(N, \bar{A}) \overset{\text{Lem.2}}{\cong} \mathrm{Ext}^{i+1}_A(N, A) = \begin{cases} i+1 > r \text{ なら必ずゼロ} \\ i+1 = r \text{ では } N = k \text{ のとき非ゼロ} \end{cases}$$

    $$\rightsquigarrow \text{inj.dim}\,\bar{A} = r - 1 \overset{\text{帰納法の仮定}}{=} \dim \bar{A} \overset{x:A\text{正則}}{=} \dim A - 1 = n - 1. \quad ((1) \Rightarrow (1'))\ \square$$

$\left((1') : \text{inj.dim} = n \quad \Rightarrow \quad (2) : 0 \ \overset{n\text{次}}{\boxed{k}} \ 0 \right)$

- $n=0$ の場合 (i.e. A : injective)
  - $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(A)$ より

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow A \quad : \text{ex.}$$

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(k,A) \longleftarrow \mathrm{Hom}(A,A) \quad : \text{ex.}$$

$\mathrm{Hom}(A,A) \cong A$ ∴ 1元生成 $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}(k,A)$ (k-modとして 1元生成) $\cong k$

つまり $\mathrm{Ext}^0_A(k,A) \cong k$.　　$\mathrm{Ext}^{正}_A(k,A) = 0$ (A : inj. より) より OK.

- $n>0$ の場合 (帰納法)
  - さきと同様, $\mathfrak{m} \ni {}^{\exists}x$: A 正則元 が取れて

次元 n はひとつ下がり Ext もひとつずれるので 帰納的に OK.

$\left((1') \Rightarrow (2) \right)$ $\square$

$\left((3) : \overset{\text{どこかい}>n}{0} \Rightarrow (1) : \text{inj.dim} < \infty \right)$

- $\mathrm{Ext}^N(k, A) = 0$ だとする $(N > n)$
- $n = 0$ の場合
  - $\mathfrak{m}$ は A の唯一の素イデアルなので Lem.1 の判定は k のみででき、$\text{inj.dim} < N$.
- $n > 0$ の場合（帰納法）
  - $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ を取る. これに対しても Ext が消えることを言わなければならない.
    $d = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) \geq 1$ とおく.
  - $\dim A_{\mathfrak{p}}$ は $\dim A$ から d 下がり.
    $\mathrm{Ext}^N_A(k, A) \overset{\text{仮定}}{=} 0 \overset{\text{Lem.4}}{\Longrightarrow} \mathrm{Ext}^{N-d}_{A_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), A_{\mathfrak{p}}) = 0$ の肩も d 下がる.
    $\longrightarrow$ 帰納法の仮定で $\text{inj.dim}\, A_{\mathfrak{p}} < \infty$.
  - $(1) \Rightarrow (1')$ より $\text{inj.dim}\, A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}} < n < N$ まで言えて、
    「$\forall M$: f.g. A-Mod, $\forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $(\underbrace{\mathrm{Ext}^N_A(M, A)}_{=: T(M)\text{ とおくと}})_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ext}^N_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) = 0$」
    「$\forall M$: f.g. A-Mod, $\mathrm{Supp}(T(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$」
    よって $T(M)$ は長さ有限.

    （$T(M)$: f.g. & $\mathrm{Supp}\, T(M) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$
    $\Rightarrow \mathrm{Ass}(T(M)) = \{\mathfrak{m}\}$
    $T(M) \supseteq \cdots \supseteq 0$ であって
    各ステップ $\cong k$ なるものができ、
    fin.dim. as k-Vect より $\ell < \infty$.）
  - $\forall \mathfrak{p}$, $T(A/\mathfrak{p}) = 0$ である.
    $\because$
    - $T(A/\mathfrak{p}) \neq 0$ なる $\mathfrak{p}$ があるとし、その極大元を取る.
    - 仮定より $T(k) = 0$ なので $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ を取り、
      $A/(\mathfrak{p} + xA) = M_0 \supseteq \cdots \supseteq M_s = 0$, $M_i/M_{i+1} \cong A/\mathfrak{p}_i$ とできる.
    - ここで $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{p} + xA \supsetneq \mathfrak{p}$ だが、$\mathfrak{p}$ の取り方から $T(A/\mathfrak{p}_i) = 0$
      $\rightsquigarrow T(A/(\mathfrak{p} + xA)) = 0$.
    - $0 \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{x} A/\mathfrak{p} \to A/(\mathfrak{p} + xA) \to 0$ ↻ T

      $T(A/\mathfrak{p}) \xleftarrow{x} T(A/\mathfrak{p}) \leftarrow 0$

      長さ有限の間の単射自己準同型で、$T(A/\mathfrak{p}) = 0$. 矛盾.
  - Lem.1 より $\text{inj.dim}\, A \leq N$.

$((3) \Rightarrow (1))$ □

$\Big((4') : \mathrm{CM}$ & $\overset{n}{\check{\text{同}}}$ $\Rightarrow$ (5) CM & ∀巴系:既約$\Big)$

- CMより巴系はA列なので、Lem.2をくり返し用いて、$\tilde{A} = A/$巴系 とおくと
$$\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(k, \tilde{A}) = \mathrm{Ext}^n_A(k, A) \overset{\text{仮定}}{\cong} k.$$

$N \subseteq A$: submod (i.e. ideal) なら
$\mathrm{Ass}(N) \subseteq \mathrm{Ass}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ より Nは $A/\mathfrak{m} = k$ に同型な加群を含む。

- $\tilde{A}$: Artin で、$\mathrm{Ass}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ より 極小非零イデアルは k に同型。
- 合わせると、極小非零イデアルは唯一。…I_0 とおく。
- I_1, I_2 : $\tilde{A}$の非零イデアル は I_0を含むので $I_1 \cap I_2 \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ これは元のAで巴系イデアルが既約であることを言っている。

$\big((4') \Rightarrow (5)\big)$ $\square$.

((5'): CM & 巴系イデアル: 既約 $\Rightarrow$ (2): $0\ \overset{n}{\check{k}}\ 0$)

○ CMより 左の $\underline{0}$ はOK.

○ q を A の 既約 な 巴系イデアルとし. $B = A/q$ とおく. さきと同様 ／Artin環.

$$\mathrm{Ext}_A^{n+i}(k, A) \cong \mathrm{Ext}_B^{i}(k, B)$$ └ 仮定より B の (0) は既約.

○ よって. A のことは忘れ. 以下を示す.

「B はArtinかつ (0) は既約だとする. このとき $\mathrm{Ext}_B^i(k,B) = \begin{cases} k & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$ 」

○ $i=0$ (i.e. $\mathrm{Hom}_B(k,B) = k$ を示す)

- ○ B: Artin より $\mathrm{Hom}_B(k,B) \neq 0$ ではある.
- ○ $0 \neq f, g \in \mathrm{Hom}_B(k,B)$ を取る.
  - ○ $f(k) \neq g(k)$ なら、ともに極小非零より $f(k) \cap g(k) = (0)$, 既約性に反する.
  - ○ $f(k) = g(k)$. $f(1) = g(\alpha)$ なる $\alpha \in k$ があるので $f = g\alpha$.
- ○ $f = g\alpha$ なる k倍関係にあるので $\mathrm{Hom}(k,B) = k$.

○ $i>0$ (i.e. $\mathrm{Ext}_B^i(k,B) = 0$ を示す)

- ○ $(0) = N_0 \subseteq \cdots \subseteq N_r = B$, $N_i/N_{i-1} \cong k$ を取る.
- ○ $0 \to N_i \to N_{i+1} \to k \to 0$:ex.

$$\mathrm{Hom}(N_i,B) \leftarrow \mathrm{Hom}(N_{i+1},B) \leftarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(k,B)}_{\cong k} \leftarrow 0 \quad \text{:ex.}$$

$(\forall i)$ $$\cdots \leftarrow \mathrm{Ext}^1(k,B) \xleftarrow{\delta_i} \mathrm{Hom}(N_i,B)$$

- ○ i を動かすと. $N_1 = k$, $\mathrm{Hom}(k,B) = k$ を用いて帰納的に

$$l(\mathrm{Hom}(N_i,B)) \leq i \quad (\text{等号成立} \Leftrightarrow \delta_1, \ldots, \delta_{i-1} \text{ が零})$$

$\cdots$ $l(\mathrm{Hom}(\underset{B}{\overset{\shortparallel}{N_r}},B)) = r$: 等号成立より全ての δ_i は0.

- ○ $0 \to N_{r-1} \to B \to k \to 0$

$$\underset{=0}{\mathrm{Ext}^1(B,B)} \leftarrow \underset{=0}{\mathrm{Ext}^1(k,B)} \xleftarrow{\delta_{r-1}} 0 \quad \overset{\text{Lem.1}}{\rightsquigarrow} B: \text{inj.}$$
$\Rightarrow$

((5') $\Rightarrow$ (2)) □

└ これでThm.1 おわり!

Lem. 5 A: Noether. I: inj. A-Mod $\Rightarrow$ I_S: inj. A_S-Mod.

prf. イデアルで inj. は判定できるが、局所化と Hom が交換し OK. $\square$

Thm. 18.2. A: Gor. $\Longrightarrow$ $A_\mathfrak{p}$: Gor.

prf. (Aの有限長 inj.resol.)$_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の有限長 inj.resol. $\square$

Def. A: Noether.

A: Gorenstein $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$: Gorenstein (local)

$\overset{\text{Thm.2}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$: Gorenstein (local)

Thm. 18.3. A: Noether local. A: Gor. $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$: Gor.

prf.

$\dim A = \dim \hat{A}$.

Ex.7.7. (テンソルが完全なのでそれはそう)

$A \hookrightarrow \hat{A}$: fflat より $\operatorname{Ext}^i_A(k, A) \otimes_A \hat{A} = \operatorname{Ext}^i_{\hat{A}}(k, \hat{A})$

$\overset{\exists}{n} < \underline{0}$ $\Longleftrightarrow$ $n \overset{\exists}{<} \underline{0}$ $\square$.

Ex. 18.1 $(\underline{a})$: A正則. A: Noether, local. A: Gor. $\Leftrightarrow$ $A/(\underline{a})$: Gor.

☺ 巴系イデアルの既約性で判定すればよい.

Ex. 18.3 A: Gor. $\Rightarrow$ $A[x]$: Gor.

☹ 大変そう

Thm. 18.4.　A : Noether, P, Q : 素イデアル

i) $E(A/P)$ は 直既約で, injective.　(i.e. $\nexists M, N$ s.t. $E(A/P) = M \oplus N$)

ii) 直既約, injective ならある P があり $E(A/P)$ に同型.

iii) $x \notin P$ なら $E(A/P) \xrightarrow[\sim]{x} E(A/P)$

iv) $P \neq Q$ なら $E(A/P) \not\cong E(A/Q)$.

v) $\xi \in E(A/P)$ なら $\exists \nu$, $P^\nu \xi = 0$

vi) $Q \subseteq P$ なら $E(A/Q)$ は A_P 加群にもなり,

$$E_A(A/Q) \cong E_{A_P}(A_P/QA_P)$$

$\Downarrow$ まとめると

Thm. 18.4′

ア) $\mathrm{Spec}\,A \xrightarrow{\sim} \{$直既約, injective A-Mod$\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,A & \xrightarrow{\sim} & \{\text{直既約, injective } A\text{-Mod}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ P & \longmapsto & E(A/P) \end{array}$$

は 全単射. ($\Leftrightarrow$ i, ii, iv)

イ) $x \notin P$ なら $E(A/P)_x = E(A/P)$　($\Leftrightarrow$ iii)

$x \in P$ なら $E(A/P)_x = 0$　($\Leftarrow$ v)

イ′) $P \nsubseteq Q$ なら $E(A/P)_Q = 0$　($\Leftarrow$ v)

$P \subseteq Q$ なら $E(A/P)_Q = E(A/P)$: すでに A_Q 加群.　($\Leftarrow$ vi)

Rmk.

$N \hookrightarrow M$ で N : inj. なら, $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ が分裂するので

$M \overset{\exists}{\cong} N \oplus N/M$ で N は M の直和因子.

prf.

i) : $0 \neq N_1, N_2 \subseteq E(A/p)$ だとすると. $N_i \cap (A/p) \neq 0$ ($\because A/p \hookrightarrow E(A/p)$: ess.ext)

$$N_1 \cap N_2 \supseteq \underbrace{(N_1 \cap A/p) \cap (N_2 \cap A/p)}_{\text{ともにA/pの非零イデアル}} \supseteq (N_1 \cap A/p)(N_2 \cap A/p) \neq 0$$

$\because A/p$: 整域

ii) : $0 \neq N$: 直既約, inj. だとする. $p \in \mathrm{Ass}\, N$ をとると $A/p \hookrightarrow N$ がある.

$$\begin{tikzcd} A/p \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & N \\ E(A/p) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

N: inj. より $E(A/p) \to N$ があるが、$A/p \hookrightarrow E(A/p)$: ess.ext. より $E(A/p) \to N$ は単射でなければならない.

inj. より分裂し、$N = E(A/p) \oplus ?$ なので $N = E(A/p)$.

iii) $x \notin p$ なら $\mathrm{Ker}(E(A/p) \xrightarrow{x} E(A/p)) \cap (A/p) = 0$. ($\because A/p$: 整域)

$\xrightarrow{\text{ess.ext}}$ $\mathrm{Ker}(E(A/p) \xrightarrow{x} E(A/p)) = 0$. $0 \to E(A/p) \xrightarrow{x} E(A/p) \to C \to 0$

inj. より分裂するので x倍は全射.

iv) $p \not\subseteq Q$ なら $x \in p - Q$ がとれ. x倍 on $E(A/p)$: non-inj., $E(A/Q)$: inj. より同型でない.

v) ii) と iv) より $\mathrm{Ass}(E(A/p)) = \{p\}$. $\xi \in E(A/p)$ に対し.

$A/\mathrm{Ann}(\xi) = A\xi \hookrightarrow E(A/p)$ より $\mathrm{Ass}(\xi A) = \{p\}$ だから $\exists \nu$, $p^\nu \xi = 0$.

$V(\mathrm{Ann}(\xi A)) = \mathrm{Supp}(\xi A)$のmin. $= \{p\}$ より $\mathrm{Ann}(\xi A)$はp-primary.

vi) $p \not\ni x$ 倍が同型なので A_p-Mod ではあり. よって $A/Q \xhookrightarrow{\text{ess.}} E(A/Q)$ から

$(A/Q)_p \hookrightarrow E(A/Q)$ が得られ、これも当然 ess.ext.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d] & N \arrow[dl, bend left] \\ E(A/p) & \end{tikzcd}$$

$M \hookrightarrow N$: A_p-Mod hom. は A-Mod hom. なので A-mod としての inj. より

A-mod hom. が生え. N が A_p-mod ならこれは A_p-mod でもある.

$\longrightarrow A_p$-inj.

□

〈大事！非常によく使うギロン〉

N: inj. なら. $p \in \mathrm{Ass}(N)$ を取ると $N \cong E(A/p) \oplus$ (補加群).

Thm. 18.5. A: Noether環上の加群について。

i) inj.の任意個直和はinj.

ii) 任意のinj.は直既約inj.の直和。

iii) ii)の直和分解は下の意味で一意的:

- ○ $M \cong \bigoplus M_i$ (M_iは直既約inj.) であるとき、各$\mathfrak{p}$に対し

  (ア) $\bigoplus_{M_i \cong E(A/\mathfrak{p})} M_i$ はMと$\mathfrak{p}$のみから決まる。 ($M(\mathfrak{p})$とかく)

  (イ) $\#\{M_i \mid \cong E(A/\mathfrak{p})\}$ もMと$\mathfrak{p}$のみから決まり、

  $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$ に等しい。

Rmk. ○(ii)(iii)は、有限群の$\mathbb{C}$線形表現の完全可約性と類似している。

(ii'): 任意の有限群の線形表現は完全可約である。[Maschke]

(iii'): (ii)の直和分解は下の意味で一意的:

- ○ $V \cong \bigoplus V_i$ (V_iは既約表現) であるとき、各W: irr. に対し

  (ア) $\bigoplus_{V_i \cong W} V_i$ はVとWのみから決まる。

  (イ) $\#\{V_i \mid \cong W\}$ も 〃 〃。

  $\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_G(W, V)$ に等しい。 ← これはfin.dim.でないとだめか?

prf.

i) M_λ: inj., $I \xrightarrow{\varphi} \bigoplus M_\lambda$ (イデアル) に対し、I: f.g. よりIの像は有限個のM_λに含まれ、延長 $A \xrightarrow{\varphi_\lambda} M_\lambda$ を足してOK。

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & \bigoplus M_\lambda \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\varphi_\lambda"] \arrow[dr, bend right, "\Sigma\varphi_\lambda"'] & M_\lambda \arrow[d, hook] \\
& \bigoplus M_\lambda
\end{tikzcd}$$

M_λ: inj.

ii) M: inj.だとする。超限帰納法で構成する。

- ○ $M \supsetneq N_\lambda$ が直既約inj.の直和なら、補加群のAssのinj.hullをつけ加えればいい
  (i.e. $M = N_\lambda \oplus N'$ とかけ、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N')$ を取り $N_{\lambda+1} = N_\lambda \oplus E(A/\mathfrak{p})$ とする)
- ○ 極限…各$\mu < \lambda$でN_μが直和になっていれば$\sum N_\mu$も直和になっていてOK.

iii) あるMの直和分解をfixし、伴う$M(P)$をとる。

(ア) WTS: $M \supseteq E \cong E(A/P)$ なら $E \subseteq M(P)$. (これが示せたら $M(P) = \sum_{M \supseteq E \cong E(A/P)} E$ はMとPのみで決まる。)

- $\xi \in E$ を取る。
  - $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_r$, $\xi_i \in M(P_i)$ とかける。 $P_1 = P$ で $P_i \neq P_j$ $(i \neq j)$ $(\because M \cong \bigoplus_i M(P_i))$
  - $0 = (\xi_1 - \xi) + \xi_2 + \cdots + \xi_r$
    $0 = \underset{\eta_1}{\shortparallel} + \underset{\eta_2}{\shortparallel} + \cdots + \underset{\eta_r}{\shortparallel}$, $\eta_i \in M(P_i)$ $(i \geq 2)$ に直す。 η_1 は「$a \in P$ なら $\exists m.\ a^m \eta_1 = 0$」をみたす。
  - たとえば P_r が $\{P_1, \dots, P_r\}$ で極小とする。prime avoidanceにより
    $a \in P_1 \cdots P_{r-1} - P_r$ をとると、$E(A/P_i)_a = 0$ $(i \neq r)$, $E(A/P_r)_a = E(A/P_r)$ だったので、$m \gg 0$ で
    $a^m \eta_1 = \cdots = a^m \eta_{r-1} = 0$ だから $a^m \eta_r = 0$. $\xrightarrow{a^m \notin P_r \text{倍は} E(A/P_r) \text{でinj.}}$ $\eta_r = 0$.
  - くり返して全ての i で $\eta_i = 0$.
- $\xi_1 - \xi = \eta_1 = 0$ より $\xi = \xi_1 \in M(P)$.

(ア)のアイデア：
もし $M = E(A/P_1) \oplus \cdots \oplus E(A/P_r)$ なら
$a \in P_2 \cdots P_r - P_1$ を取ることで
$M_a = E(A/P_1)_a$
と、"$E(A/P_1)$成分"を特定できる。

(イ) $M_P = \bigoplus_{Q \subseteq P} M(Q)$ $\left(\because (18.4, イ):\ \begin{matrix} Q \not\subseteq P \text{ なら } E(A/Q)_P = 0 \\ Q \subseteq P \text{ なら } E(A/Q)_P = E(A/Q) \text{: すでに} A_P\text{-mod} \end{matrix}\right)$

$\mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), M_P)$

$= \bigoplus_{Q \subseteq P} \mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), M(Q))$

$= \mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), M(P)) \oplus \bigoplus_{Q \subsetneq P} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), M(Q))}}$

$x \in P - Q$ が取れ
$\begin{cases} x \notin Q \text{ より } M(Q) \text{で単射} \\ x \in P \text{ より } xK(P) = 0 \end{cases}$ なので
任意の $f: K(P) \to M(Q)$ は

$$\begin{tikzcd} K(P) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"', "=0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M(Q) \arrow[d, "x"] \\ K(P) \arrow[r, "f"] & M(Q) \end{tikzcd}$$

より $f = 0$.

$M(P) \cong \bigoplus_{i \in I} E(A/P)$ とおくと $\cong$

$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), E(A/P))$
$\shortparallel$
$E_{A_P}(K(P))$

$0 \neq f, g \in \mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), E_{A_P}(K(P)))$ なら、$K(P) \xrightarrow{ess.} E_{A_P}(K(P))$
より $\begin{matrix} \mathrm{Im} f \cap K(P) \neq 0 \\ \mathrm{Im} g \cap K(P) \neq 0 \end{matrix}$ より $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. i.e. fとgは定数倍

$K(P)$上1次元

$\shortparallel$ $|I|$次元.

$\xrightarrow{\text{まとめると}}$ $M(P) \cong \bigoplus_{i \in I} E(A/P)$ と書くとき、
$|I| = \dim_{K(P)}(\mathrm{Hom}_{A_P}(K(P), M_P))$
: MとPのみによる。

□ Thm. 18.5.

Thm. 18.6. [Matlis duality] $(A,\mathfrak{m},k)$: Noether, local. $E_A = E_A(k)$

$\mathcal{C}$: 有限長 A 加群の圏とおくと. $(-)^\vee := \mathrm{Hom}_A(-,E_A)$ は

i)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "(-)^\vee"'] \arrow[r, phantom, "\sim^{op}"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right=1.5ex, "(-)^\vee"'] \end{tikzcd}$$
: 自己反変同値を与え、$\ell(M)=\ell(M^\vee)$.

ii) $E_A(k)=E_{\hat{A}}(k)$、 $k \overset{\vee}{\rightleftarrows} k^\vee$: 通常の双対空間

さらに以下のように拡張される:

$\mathcal{D}$: Artin A 加群の圏

$\mathcal{E}$: Noether $\hat{A}$ 加群の圏 とすると.

$$\begin{tikzcd} \underset{\substack{\text{Artin}\\ A\text{-Mod}}}{\mathcal{D}} \arrow[r, shift right=1.5ex, "\mathrm{Hom}_A(-,E_A)"'] \arrow[r, phantom, "\sim^{op}"] \arrow[d, phantom, "\cup" description, "+\text{Noether}"] & \underset{\substack{\text{Noether}\\ \hat{A}\text{-Mod}}}{\mathcal{E}} \arrow[l, shift right=1.5ex, "\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(-,E_{\hat{A}})"'] \arrow[d, phantom, "\cup" description, "+\text{Artin}"'] \\ \underset{\substack{\text{fin.len.}\\ A\text{-Mod}}}{\mathcal{C}} \arrow[r, shift right=1.5ex] \arrow[r, phantom, "\sim^{op}"] & \underset{\substack{\text{fin.len.}\\ A\text{-Mod}}}{\mathcal{C}} \arrow[l, shift right=1.5ex] \end{tikzcd}$$

$E_A \rightleftarrows \hat{A}$

が反変同値を与える.

注意:
- fin.len. $\Leftrightarrow$ Artin かつ Noether
- fin.len. $\hat{A}$-mod = fin.len. A-mod.

Rmk. $E := E_A(k)$

- E は k に同型な極小部分 A 加群を唯一含む.
  ∵ k の ess. ext. なので k と交わり. 交わるなら体なので一致する.
- よって $k^\vee = \mathrm{Hom}_A(k,E) \cong \mathrm{Hom}_k(k,k) =$ (k の通常の dual).
  これは単なる「$\mathrm{Hom}_A(k,E)$ は k 上1次元" (Thm.5(iii))」より強いことを言っていて,
  自然な $k^{\vee\vee} \cong k$ があることを意味する.

N: simple なる $0 \neq x \in N$ による
$N = xA \cong A/\mathrm{Ann}(x)$ であり、
$A \supsetneq \mathrm{Ann}(x)$ だから $\mathfrak{m} \supseteq \mathrm{Ann}(x)$ より
$N \supsetneq \underbrace{\mathfrak{m}/\mathrm{Ann}(x)}_{=0} \supseteq 0$ より $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x)$

i) ・E : inj. より $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_A(-, E)$ は完全関手.

・$M = M_{\ell(M)} \supsetneq \cdots \supsetneq M_0 = 0$ とする.

・$0 \to M_i \to M_{i+1} \to k \to 0$:ex. (M_i/M_{i+1} は単純 A mod より $\cong A/\mathfrak{m}$)

$\vee \circlearrowleft$ $0 \leftarrow M_i^\vee \leftarrow M_{i+1}^\vee \leftarrow k^\vee = k \leftarrow 0$:ex. より $\ell(M_{i+1}^\vee) = \ell(M_i^\vee) + 1$

$\rightsquigarrow$ 帰納的に $\ell(M) = \ell(M^\vee)$.

・$\tau_M : M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, E), E) = M^{\vee\vee}$: 自然な hom. があるが、
(i.e. $\tau : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{\vee\vee}$)

; $x \mapsto \hat{x} = [\lambda \mapsto \lambda(x)]$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{M_i}"] & M_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{M_{i+1}}"] & k \arrow[r] \arrow[d, "\tau_k : \text{vect.の一般論で iso}"] & 0 \ :\text{ex.} \\
0 \arrow[r] & M_i^{\vee\vee} \arrow[r] & M_{i+1}^{\vee\vee} \arrow[r] & k^{\vee\vee} \arrow[r] & 0 \ :\text{ex.}
\end{tikzcd}
$$

より帰納的に five lemma で τ_M : iso である.

ii) ・$E \to E \otimes_A \hat{A}$ は全射.

∵ $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n \subseteq \prod_n A/\mathfrak{m}^n$ とみなし. $e \otimes (a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n \in E \otimes_A \hat{A}$ をひとつ取る.

Thm.4(v) より $e\mathfrak{m}^k = 0$ なる k が取れるが、$ea_k \otimes 1 = e \otimes (a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n$ である.

実際 $ea_k \otimes 1 - e \otimes (a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n$
$= e \otimes (a_k - a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n$
$= \sum e\pi_i \otimes b_i$
$= 0$.

$a_k - a_n$ は $n \leq k$ で 0, $n \geq k$ で $\mathfrak{m}^k$ の元なので
$(a_k - a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n \in \widehat{\mathfrak{m}^k} = \mathfrak{m}^k \hat{A}$ (本質). よって
$(a_k - a_n \bmod \mathfrak{m}^n)_n = \sum \pi_i b_i$ ($\pi_i \in \mathfrak{m}^k$, $b_i \in \hat{A}$) とかける.

・$E \to E \otimes_A \hat{A}$ は単射. ($A \to \hat{A}$: fflat で, Thm.7.5). よって $E \cong E \otimes_A \hat{A}$: $\hat{A}$ 加群.

・E は $\hat{A}$ - injective.

∵

$\hat{A}$のイデアル　$\hat{A}$-hom.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[r, hook] & \mathfrak{a} \arrow[r, "\text{①}\ \varphi"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\text{準同型定理}\ \Downarrow"] & E & \hat{A} = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n \arrow[l] \arrow[d] \\
& \mathfrak{a}/\mathfrak{m}^\mu \hat{A} \cap \mathfrak{a} \arrow[ur, "\text{④}"] & & A/\mathfrak{m}^\mu : A\text{加群} \arrow[ul, "\text{⑤}\ \text{E は A-inj. より}"', "\Uparrow\ \text{合成}\ \text{⑥}"]
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi \overset{②}{\supseteq} \mathfrak{m}^\nu \mathfrak{a} \overset{③}{\supseteq} \mathfrak{m}^\mu \hat{A} \cap \mathfrak{a}$　Artin–Rees $\mu \gg \nu$

$\mathfrak{a}/\mathfrak{m}^\mu \hat{A} \cap \mathfrak{a} \cong \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^\mu \hat{A}/\mathfrak{m}^\mu \hat{A} \subseteq \hat{A}/\mathfrak{m}^\mu \hat{A} \cong A/\mathfrak{m}^\mu$

② … $\mathfrak{a}$: f.g. より
$\mathfrak{a}$ の生成元の像 $\in E$ を
消すような $\mathfrak{m}^\nu$ を取ると
$\varphi(\mathfrak{m}^\nu \mathfrak{a}) = \mathfrak{m}^\nu \varphi(\mathfrak{a}) = 0$.

これは $\mathfrak{a} \hookrightarrow \hat{A}$ と整合した
延長になっている.

・E は k の $\hat{A}$ での inj. hull. (本質的拡大は明らかなので.)　Thm.18.6.

□

Lem. 6 A : Noether, $N \subseteq M$: ess. ext. $\Rightarrow$ $N_S \subseteq M_S$: ess. ext.

prf. $M \to M_S$ を $\xi \mapsto \xi/1 =: \xi_S$ と書く。

- 「$\forall \xi_S \neq 0$ に対し $N_S \cap (A_S \xi_S) \neq 0$」を示せば十分。

  ∵ それが示されたとする。
  ($0 \neq L \subseteq M_S$ なら、$0 \neq x \in L$ を取ると $x = u\xi_S$ $(u \in A_S^\times)$ と書けるが、
  $N_S \cap (A_S \xi_S) \neq 0$ より $\eta\xi_S \in N_S$ が取れるので、$\underset{\overset{\neq}{0}\ (\because u \in A_S^\times)}{u\eta\xi_S} \in N_S \cap L$ である。

- $\xi_S \neq 0$ だとする。
- $\{\mathrm{ann}(t\xi) \mid t \in S\}$ の極大元を $\mathrm{ann}(t_0\xi)$ とし、$\eta = t_0 \xi$ とおく。$t_0 \in S$ より $\eta \neq 0$.
- $\mathfrak{b} = (N : \eta)_A = \{a \in A \mid a\eta \in N\}$ とすると、$\mathfrak{b}\eta = A\eta \cap N \overset{\text{ess.ext}}{\neq} 0$.
- $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ と生成元を取る。
  $b_i \eta_S \neq 0$ なる i がある。

  ∵ ないとする。局所化の構成から ある $t \in S$ により $tb_i\eta = 0$ $(\forall i)$.
  ($t\mathfrak{b}\eta = 0$ だが、η のとり方 ($\mathrm{Ann}\,\eta$ が極大) より η ですでに零化され $\mathfrak{b}\eta = 0$.

- $b_i\eta_S \in (A_S\eta_S) \cap N_S = (A_S\xi_S) \cap N_S$ より OK.

Lem. 6 □

Rmk.

- $M \hookrightarrow I^\bullet$: inj. resol. が minimal $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} I^0 = E_A(M) \\ I^{i+1} = E_A(\mathrm{Im}\, d^i) \end{cases}$

- (Lem. 5 I : inj. A-mod $\Rightarrow$ I_S : inj. A_S-mod.
  Lem. 6 $N \subseteq M$: ess. ext. $\Rightarrow$ $N_S \subseteq M_S$: ess. ext.

  より $\underline{\underline{E_A(N)_S = E_{A_S}(N_S)}}$.

$\rightsquigarrow$ $M \hookrightarrow I^\bullet$: minimal. inj. resol. as A-mod. ならば

$M_S \hookrightarrow I_S^\bullet$: minimal. inj. resol. as A_S-mod. となる。 … ☆

Def. $M \hookrightarrow I^\bullet$: min. inj. resol.

$\mu_i(P,M) :=$ (I^iの直既約分解に現れる$E(A/P)$のコスウ)

つまり by def で $I^i = \bigoplus_{P:\text{素イデアル}} E(A/P)^{\oplus \mu_i(P,M)}$.

Thm. 18.7. A : Noether.

ここは既知 (Ex. 7.7.)

$$\mu_i(P,M) = \dim_{k(P)} \mathrm{Ext}^i_{A_P}(k(P), M_P) = \dim_{k(P)} \mathrm{Ext}^i_A(A/P, M)_P$$

prf. (A,P,k) : local. で示せばよい. (☆より $\mu_i(P,M) = \mu_i(PA_P, M_P)$ なので)

○ $M \hookrightarrow (I^\bullet, d)$: min. inj. resol. を取る. Ext の def より

$\mathrm{Ext}^i_A(k,M)$ ← i次コホモロジー

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_A(k, I^{i-1}) \xrightarrow{d^{i-1}} \mathrm{Hom}_A(k, I^i) \xrightarrow{d^i} \mathrm{Hom}_A(k, I^{i+1}) \to \cdots$$

○ $\cong$ 　 $\cong$ ($f \mapsto f(1)$ 対応) 　 $\cong$

$$T^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} T^i = (0:P)_{I^i} \xrightarrow{d^i} T^{i+1} \to \cdots$$

$\because$ I^i の socle ← 極大イデアルを零化する元全体のこと.

○ 微分 d^i は全て自明.

$\because$ $x \in T^i$ を取る。$Ax \subseteq I^i$ は $I^{i-1} \xrightarrow{d} I^i$ より $d(I^{i-1})$ と交わりをもつが、

$d(I^{i-1}) \hookrightarrow I^i$ ess.ext.

$Ax \cong k$: 体 より $Ax \subseteq d(I^{i-1})$. $x \in d(I^{i-1})$.

○ よって $\mathrm{Ext}^i_A(k,A) = T^i$.

○ $\dim_k T^i = \dim_k \mathrm{Hom}_A(k, I^i) \overset{\text{Thm. 5 (iii)}}{=} \mu_i(P,M)$.

Thm. 18.8. A : Noether

A : Gorenstein $\iff$ $A \hookrightarrow I^\bullet$: min. inj. resol. が $I^i = \bigoplus_{\mathrm{ht} P = i} E_A(A/P)$

$\iff \mu_i(P,A) = \delta_{i, \mathrm{ht} P} \quad (\forall P)$

Thm. 18.9. $(A, \mathfrak{m})$: Noether, local. M: f.g. A-Mod.

$\text{inj.dim}\, M < \infty \implies \text{inj.dim}\, M = \text{depth}\, A$

prf. $\text{inj.dim}\, M = r$, $\text{depth}\, A = t$ とおく.

- $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ なら. $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ は $A/\mathfrak{p} \xhookrightarrow{x} A/\mathfrak{p}$ を与え. (inj dimを二える Ext=0より)

  $\text{Ext}_A^r(A/\mathfrak{p}, M) \xleftarrow{x} \text{Ext}_A^r(A/\mathfrak{p}, M)$ で NAK より $\text{Ext}_A^r(A/\mathfrak{p}, M) = 0$.

- Lem. 1 より. $\text{inj.dim} = r$ なら $\text{Ext}_A^r(A/\mathfrak{p}, M) \neq 0$ なる $\mathfrak{p}$ は存在しなければならないので

  $\text{Ext}_A^r(k, M) \neq 0$.

  Thm. 6.1(ii): {N-非正則} $= \bigcup \text{Ass}(N)$

- $x_1, \dots, x_t$ を極大A列, $N = A/(x_1, \dots, x_n)$ とおく. $\mathfrak{m} \in \text{Ass}(N)$.

  $\rightsquigarrow k \hookrightarrow N$ があるので $0 \neq \text{Ext}_A^r(k, M) \twoheadleftarrow \text{Ext}_A^r(N, M)$ より $\text{Ext}_A^r(N, M) \neq 0$.

- $K(x_1, \dots, x_t) \twoheadrightarrow N$: proj. resol. により、$\text{Ext}_A^t(N, M)$ は

$$\text{Coker}\left(\text{Hom}_A(K_{t-1}, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(K_t, M)\right) \text{ となる.}$$

$$\begin{array}{ccc}\text{Hom}_A(K_{t-1}, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(K_t, M) \\ \wr\| & & \wr\| \quad \because K_t = Ae_{1\dots t} \cong A. \\ \bigoplus_{i=1}^{t} M & \twoheadrightarrow & M \\ \cup & & \\ (m_i) & \longmapsto & \sum (\text{sgn}) x_i m_i \end{array}$$

より $\cong M/(x_1, \dots, x_t)M \underset{\text{NAK}}{\neq 0}$

- よって $\exists$ ~~長さ~~ t の proj. resol.

$$\left.\begin{array}{l}\text{proj.dim} \leq t \\ \text{proj.dim} \geq t\end{array}\right\} \text{proj.dim}\, N = t.$$

$\text{Ext}^t(N, -) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Ext}^t(-, M) \neq 0 & \text{より} & t \leq \text{inj.dim}\, M = r. \\ \text{Ext}^r(N, -) \neq 0 & \text{より} & r \leq \text{proj.dim}\, N = t.\end{array}\right\} t = r.$$

Thm. 18.9. □